LE CALCUL INTEGRAL

§1 Introduction

1.1 Un peu d'histoire

- On désigne par *calcul infinitésimal* l'outil de calcul élaboré à parti du XVII$^{\text{ème}}$ siècle mettant en jeu des quantités « infiniment petites ». Ses principales applications sont le *calcul différentiel* (notion de vitesse, de tangente à une courbe, de dérivée…) et le *calcul intégral* (calcul de la longueur d'une courbe, de l'aire d'une surface, du volume d'un solide).

- Les mathématiciens grecs se méfiaient de l'"*infini*" .Dès la seconde moitié du V$^{\text{ème}}$ av. J.-C, Zénon d'Elée avait mis en évidence les paradoxes rencontrés quand on essayait de le manipuler, par exemple, dans une opération aussi simple que la dichotomie, division d'une quantité par 2 répétée à l'infini (paradoxe de la flèche ou de Achille et la tortue). **Archimède** au III$^{\text{ème}}$ s. av. J.-C., mais déjà Eudoxe avant lui, utilisait la *méthode d'exhaustion* (ainsi appelée par Grégoire de Saint-Vincent vers 1647) de manière systématique dans ses ouvrages pour démontrer des résultats sur les aires et les volumes. Ce n'est pas une méthode de découverte, mais un procédé de vérification d'un résultat connu ou tout au moins supposé préalablement.

Pour la mettre en œuvre, on encadre la quantité à étudier par des valeurs aisément calculables, et on compare ces bornes directement à la valeur annoncée pour la quantité calculée. Une double démonstration par l'absurde permet de conclure que la quantité ne peut être ni inférieure ni supérieure à la valeur annoncée ; on en déduit donc qu'elles sont égales. Cette méthode, très rigoureuse (qui était essentiellement géométrique), sera un modèle de démonstration jusqu'à la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, quand le calcul infinitésimal verra le jour.

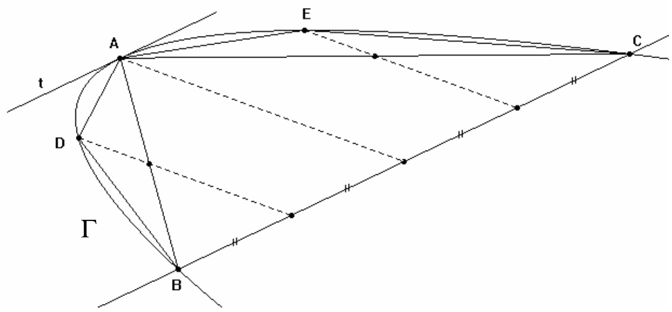
Cette méthode ne résout pas le problème de l'infini (Aristote : l'infini est-il potentiel (infini en puissance) ou actuel (infini en acte) ?), mais permet à Archimède de le contourner.

- Ces calculs d'aire de figures géométriques simples comme les rectangles, les polygones et les cercles sont décrits dans les plus anciens documents mathématiques connus. La première réelle avancée au-delà de ce niveau élémentaire a été faite par *Archimède*, le génial savant grec. Grâce à la technique *d'Archimède*, on pouvait calculer des aires bornées par des paraboles et des spirales. Au début du XVII e siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité. La découverte majeure de la résolution générale du problème d'aire fut faite indépendamment par *Newton* et *Leibniz* lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en **inversant le processus de différentiation**. Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par *Newton* en 1669 et ensuite publiée en 1711 dans un article intitulé *De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*. Indépendamment, *Leibniz* découvrit le même résultat aux environs de 1673 et le formula dans un manuscrit non publié daté du 11 novembre 1675.

1.2 Calcul d'un segment de parabole

- Archimède développe une méthode proche du calcul infinitésimal pour calculer l'aire d'un segment de parabole. Sa méthode de calcul d'aire est proche de l'idée d'infiniment petit. Cependant, le passage au calcul intégral proprement dit demandait également une évolution du concept de nombre. Celle-ci a attendu le dix-septième siècle.

Soit une parabole Γ, un point A de Γ et une droite (BC) parallèle à la tangente t en A à Γ, avec $\{B,C\} \subset \Gamma$. Archimède a montré que l'aire S du segment de parabole comprise entre la parabole et le segment [BC] est égale au 4/3 de l'aire du triangle ABC . L'idée est de construire les triangles AEC et ADB et de montrer que chacun d'eux a une aire égale à 1/8 de l'aire du triangle ABC, donc leur somme vaut 1/4 de l'aire de ABC. Puis en itérant ce calcul, on obtient en posant **a** l'aire du triangle ABC :



$$S = a\,(1 + 1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \dots)$$

Cette somme infinie vaut 4/3, et donc $S = 4/3 \cdot a$.

Cette méthode fut réutilisée pour calculer certaines aires aux XV$^{\text{ème}}$ et au XVI$^{\text{ème}}$ siècle en particulier par Cavalieri (1598 – 1647). En 1629 Bonaventura Francesco Cavalieri développa la méthode des indivisibles qui allait donner naissance au calcul intégral. La théorie des indivisibles de Cavalieri était un développement de la méthode d'exhaustion d'Archimède et s'inspirait de la théorie des infiniment petits géométriques de Kepler. Cette théorie permit à Cavalieri de calculer simplement et rapidement les aires et les volumes de diverses figures géométriques.

§2 Calcul d'aire – approche expérimentale :

<u>Préliminaire</u> :

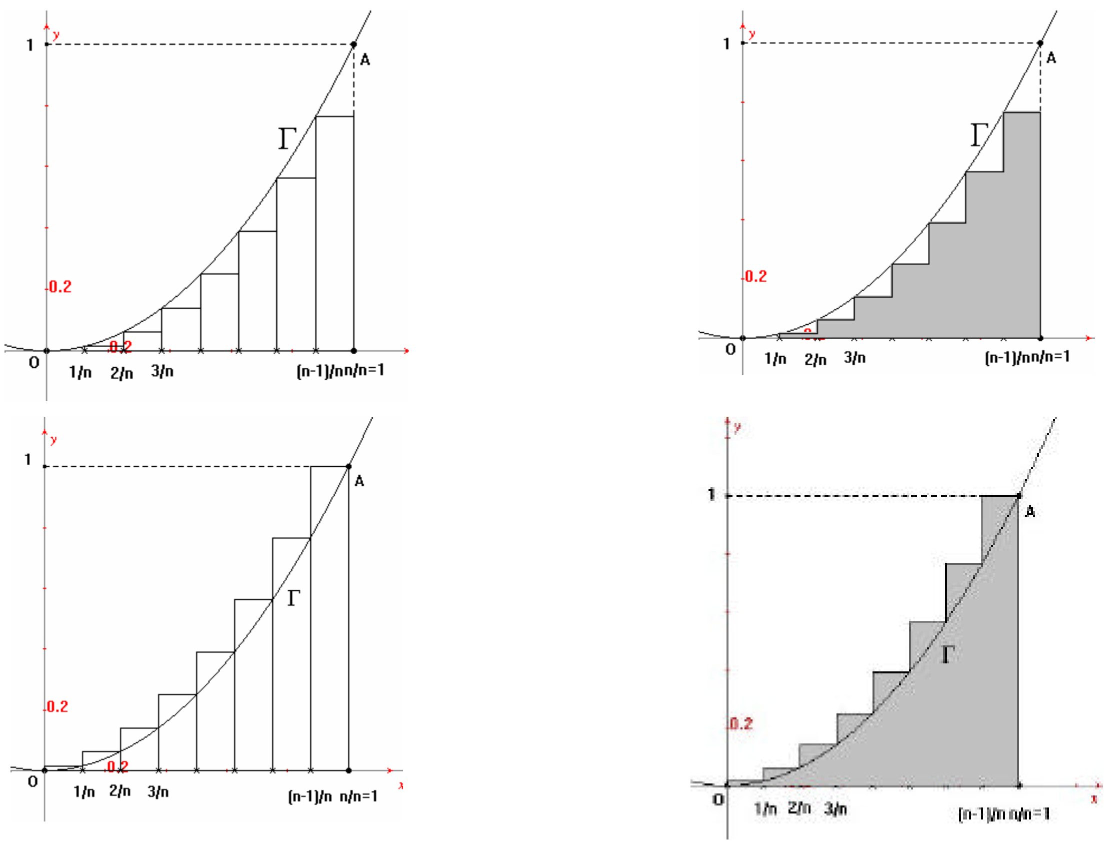
Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On appelle f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x^2$ et on note Γ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (l'unité d'aire est l'aire du carré construit sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$).

Pour cela, on subdivise l'intervalle [0 ; 1] en n intervalles : $[0;1/n]$, $[1/n;2/n]$, $\ldots[(n-1)/n;n/n]$ et on construit (voir figure ci-dessous) les « petits » rectangles situés sous la courbe Γ et les « grands » rectangles situés au-dessus de la courbe Γ.

On appelle u_n la somme des aires des « petits » rectangles ainsi construits et v_n la somme des aires des « grands » rectangles » et on admettra que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \text{A} \leq v_n$.



1. Calculer u_6 et v_6 et en déduire un encadrement de A.

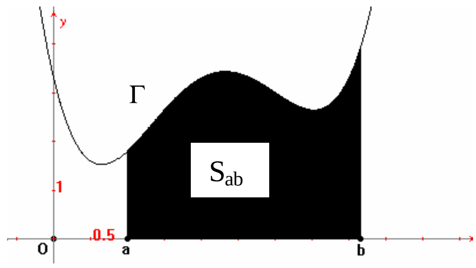
2. Vérifier que $u_n = \dfrac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$.

Donner de même une expression de v_n.

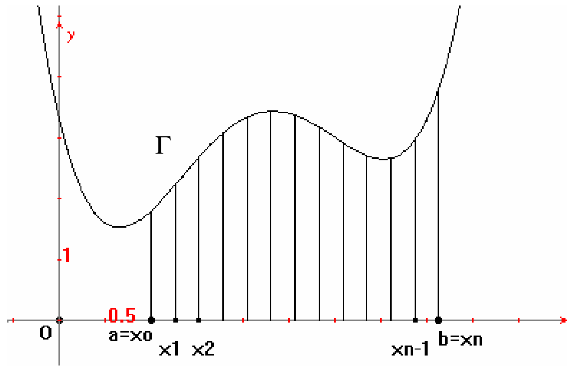
3. Démontrer que $u_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$. Calculer de même v_n, puis $v_n - u_n$.

4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ En déduire la valeur exacte de A.

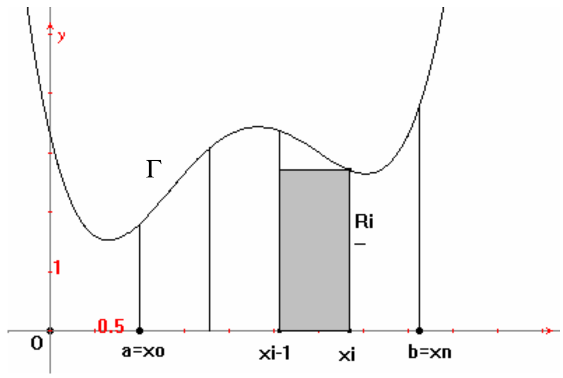
§3 L'intégrale[1] de Riemann (*Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826-1866*)



Soit une fonction f **continue** et **non négative** sur un intervalle [a, b].
Calcul de **l'aire S_{ab} de la figure comprise entre le graphique** Γ **de f, l'axe des abscisses (OI) et les verticales x = a et x = b.**
Soit $\mathbf{D}_n$ une division de l'intervalle [a,b] en n intervalles déterminée par n+1 nombres x_k, $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, avec $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.



Notons $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$: la longueur de l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et $\Delta^* x = \max(\Delta_i x)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$;
on appelle $\Delta^* x$ la **norme** de la division $\mathbf{D}_n$.
La fonction f est continue sur [a,b], donc bornée ;
soit M_i le maximum de f sur $[x_{i-1}, x_i]$
et m_i le minimum de f sur $[x_{i-1}, x_i]$;
on aura nécessairement $m_i \leqslant M_i$, $\forall i$.

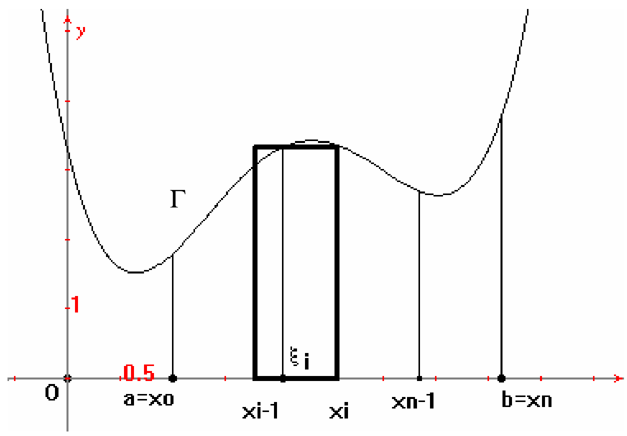


Soit les rectangles extérieurs $\overline{R_i}$
de base $\Delta_i x$ et de hauteur M_i et d'aire $\overline{A_i} = M_i \cdot \Delta_i x$
et les rectangles intérieurs $\underline{R_i}$
de base $\Delta_i x$ et de hauteur m_i et d'aire $\underline{A_i} = m_i \cdot \Delta_i x$;

posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta_i x$

et $s_n = \sum_{i=1}^{n} \underline{A_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta_i x$: on a $\mathbf{s_n} \leqslant \mathbf{S_{ab}} \leqslant \mathbf{S_n}$.

Si n augmente et la norme $\Delta^* x$ diminue, on compose une suite décroissante $\mathbf{S_n}$ et une suite croissante $\mathbf{s_n}$.



Construisons maintenant, au lieu des rectangles intérieurs et extérieurs, un **rectangle moyen quelconque**, en conservant, comme précédemment, pour base $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ et en prenant
comme hauteur une ordonnée quelconque $f(\xi_i)$,
avec $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Considérons la somme S'_n des aires de ces rectangles moyens :

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta_i x \ .$$

On a, comme pour $\mathbf{S_{ab}}$: $\mathbf{s_n} \leqslant \mathbf{S'_n} \leqslant \mathbf{S_n}$.

Note :** cette somme* S'_n *est appelée* ***somme de Riemann.

---

[1] Le terme de calcul **intégral** est du au mathématicien Bâlois *Jakob Bernoulli*. Ce terme vient du latin ***integer*** signifiant "entier total" . L'idée est qu'ici d'une somme infini d'infiniment petits, on obtient le tout.

Augmentons maintenant indéfiniment le nombre n de divisions du segment [a,b] de façon que, simultanément, la norme $\Delta^*x = \max(\Delta_i x)$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) tende vers zéro

Rappel : Soit $x_0 \in [a,b]$, f est **continue** en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \eta>0$ tel que $|x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$;
ce qui signifie que ε étant donné (aussi petit que l'on veut), η dépend de ε et de x_0 .

On peut **démontrer** que si f est continue sur un intervalle fermé, alors f y est « **uniformément continue** », c'est à dire que ε étant donné, il existe un η indépendant de x_0, le même η sur tout l'intervalle [a,b] tel que

" e >**0 ,** " **{x$_1$,x$_2$}** Ì **[a,b],** $h >**0 tel que** |**x$_1$-x$_2$**| < h Þ |**f(x$_1$)-f(x$_2$)**| < e **.**

Soit $S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\cdot\Delta_i x$; comme f est continue sur [a,b], donc sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$,
f y atteint son maximum et son minimum (théorème de continuité),
c'est à dire : $\exists \{\alpha_i, \alpha_i'\} \subset [x_{i-1}, x_i]$ tels que $f(\alpha_i) = m_i$ et $f(\alpha_i') = M_i$, d'où $S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n}\left[f(\alpha_i) - f(\alpha_i')\right]\Delta_i x$.

Mais comme f est uniformément continue sur [a,b], si ε est donné, on peut trouver un η tel que

" **{x$_1$,x$_2$}** Ì **[a,b],** |**x$_1$-x$_2$**| < h Þ |**f(x$_1$)-f(x$_2$)**| < e **.**

En prenant une division **D**$_n$ telle que $\Delta^* x < \eta$, on aura sur tout $[x_{i-1}, x_i]$: $|\alpha_i - \alpha_i'| < \eta \Rightarrow |f(\alpha_i) - f(\alpha_i')| < \varepsilon$
d'où $\left|S_n - s_n\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left[f(\alpha_i) - f(\alpha_i')\right]\Delta_i x\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|f(\alpha_i) - f(\alpha_i')\right|\cdot\Delta_i x < \sum_{i=1}^{n} e\cdot\Delta_i x < \varepsilon \sum_{i=1}^{n}\Delta_i x = \varepsilon\,(b-a)$
et en prenant $\varepsilon' = \varepsilon\,(b-a)$, on a établit que, avec N_0 correspond à la division telle que $\Delta^* x < \eta$

$$\boxed{\forall \varepsilon' > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que si } n > N_0, \text{ alors } \left|S_n - s_n\right| < \varepsilon' \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = 0.}$$

D'autre part, pour tout n, nous avions : $s_n \leqslant S_{ab} \leqslant S_n$: donc $\lim_{n\to+\infty}(S_n) = \lim_{n\to+\infty}(s_n) = S_{ab}$.

De plus $s_n \leqslant S'_n \leqslant S_n$, donc $\lim_{n\to+\infty}(S'_n) = S_{ab}$. Cette somme S'_n apparaît plus générale que les sommes s_n et S_n ,
car pour la calculer nous pouvons choisir arbitrairement $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, et en particulier, nous pouvons prendre $f(\xi_i) = m_i$ ou $f(\xi_i) = M_i$. Lors d'un tel choix, la somme S'_n se transforme en s_n ou en S_n.

Finalement :

Les raisonnements précédents nous conduisent au **théorème** suivant :
Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] et si l'on construit une division **D**$_n$ de [a,b] avec
$\forall i, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, alors $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta_i x = S_{ab}$ existe et représente
l'aire de la figure comprise entre le graphique G **de f, l'axe des abscisses (OI) et les verticales x = a et x = b.**

Notation : $S_{ab} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$ et on l'appelle **intégrale définie** de la fonction f entre a et b.

Notes :

1) Les nombres *a* et *b* sont appelés **bornes d'intégration** et *x* **variable d'intégration**.
dx est un symbole insécable (on ne peut pas le séparer de *d*) à prendre pour l'instant tel quel.
On l'appelle la différentielle de x (voir plus loin le § sur la notion de différentielle).

2) Si f est une fonction continue, a et b deux nombres, alors l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est un **nombre** .

Le symbole $\int$ se présente comme la lettre stylisée **S** et doit rappeler la somme qui, lors du passage à la limite, donnait la valeur de l'intégrale définie. L'expression sous le signe intégral $f(x)dx$ doit rappeler l'aspect des termes de cette somme, et plus précisément $f(\xi_i)\cdot\Delta_i x$.

La lettre **x** , figurant sous le signe d'intégration $\int$ s'appelle **variable d'intégration.**

L'intégrale est un nombre ne dépendant pas de la désignation de la variable d'intégration x, et nous pouvons, dans l'intégrale définie, désigner la variable d'intégration par n'importe quelle lettre. Cela n'aura, évidemment, aucune influence sur la valeur de l'intégrale, qui dépend seulement des valeurs de f sur [a,b] et de a et b. Ainsi, la désignation de la variable indépendante ne joue aucun rôle, et on peut écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt\ .$$

3) Le problème du calcul intégral est celui de l'établissement d'une somme de la forme $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta_i x$ puis du passage à la limite. Remarquons que lors du passage à limite, le nombre de termes dans la somme mentionnée croîtra indéfiniment, et que chacun d'entre eux tendra vers zéro. L'usage de la définition de l'intégrale se révèle être très peu pratique car demandant des calculs longs et parfois difficiles. Cependant, pour certaines fonctions (pas toutes), il existe une alternative plus simple. Les travaux de Newton et Leibniz au XVII$^{\text{ème}}$ siècle ont montré qu'il y a une relation entre **intégration** et **différenciation**.

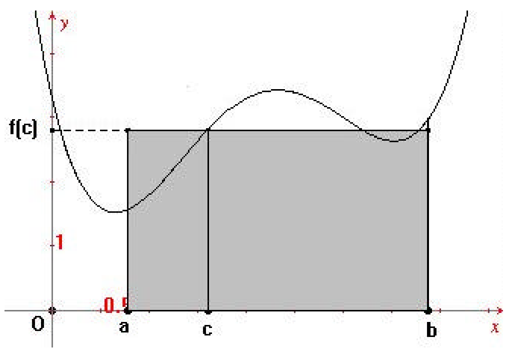
Cette relation s'appelle le ***théorème fondamental du calcul intégral***.

§4 Le théorème fondamental du calcul intégral

Un théorème préliminaire :

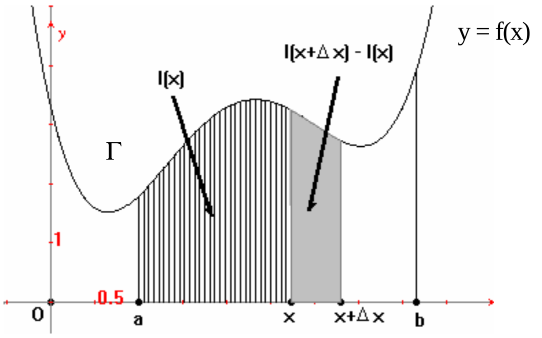
Théorème de la moyenne :

Si f est une fonction continue sur [a,b], alors il existe un nombre c ∈ [a,b] tel que $\int_a^b f(x)dx = \mathbf{f(c)} \times \mathbf{(b-a)}$



Démonstration :

Soit une fonction f continue sur [a,b].
Considérons la fonction I définie de [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $I(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a,b]$



I(x) est l'aire de la figure comprise entre le graphique Γ de f, l'axe des abscisse (OI) entre a et x .
Soit un petit nombre $\Delta_x > 0$, appelons $\Delta I = I(x+\Delta_x)-I(x)$;

on a , $\forall x \in [a,b]$, $\mathbf{I'(x)} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{\Delta I}{\Delta_x} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{I(x+\Delta_x)-I(x)}{\Delta_x} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{1}{\Delta_x}\left[\int_a^{x+\Delta_x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{1}{\Delta_x}\left[\int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt\right]$.

Par le théorème de la **moyenne** : $\exists\, \xi \in [x,x+\Delta_x]$ tel que $\int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt = f(\xi)\cdot\Delta_x$ et

donc $\mathbf{I'(x)} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{1}{\Delta_x}\left[f(\xi)\cdot\Delta_x\right] = \lim\limits_{\Delta_x \to 0}\left[f(\xi)\right] = \lim\limits_{\xi \to x}\left[f(\xi)\right] = \mathbf{f(x)}$, car f est continue sur [a,b] et si Δ_x tend vers 0, alors ξ tend vers x (car $\xi \in [x,x+\Delta_x]$).

On a démontré que , $\forall x \in [a,b]$, $\mathbf{I'(x) = f(x)}$**,** d'où le **théorème** suivant :

Le théorème fondamental du calcul intégral :

La fonction I définie de [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$
définie par $I(x) = \int_a^x f(t)dt$, " x Î [a,b], admet pour dérivée la fonction f .

Définition : Soit f une fonction définie sur intervalle I.
Une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, est appelée **primitive** de f sur I .

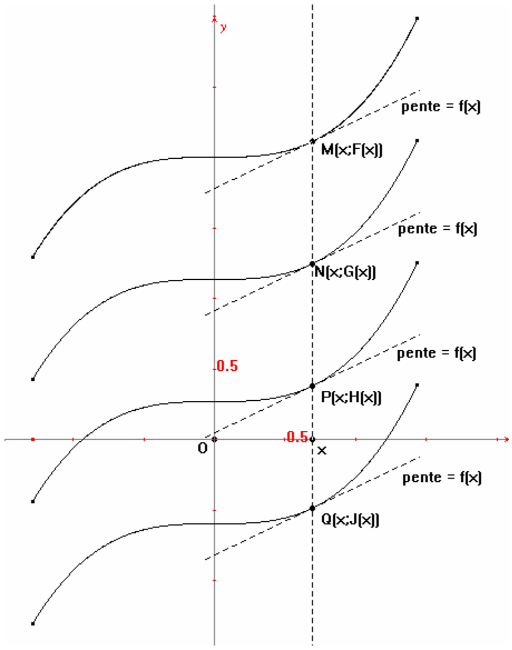
Théorème : Soit f définie sur I, et F une primitive de f sur I.
Alors une fonction G est primitive de f sur I si et seulement si G = F + c, où $c \in \mathbb{R}$,
c'est à dire $G(x) = F(x) + c$, $\forall x \in I$.

Démonstration : 1) " ⇒ " Soit G et F deux primitives de f sur I, alors la fonction (G - F) a une dérivée nulle :

en effet : $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$. Donc la fonction (F - G) est une fonction constante et $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que G – F = c et donc G = F + c .

2) " ⇐ " Si G = F + c, alors $G' = F' + c' = f + 0 = f$ et donc G est une primitive de f sur I . **Cqfd**

Ainsi :
Si l'on connaît une primitive F de f, on obtient toutes les primitives G de f avec G = F + c .
Toutes les primitives d'une fonction f sont égales, à une constante près.
Toutes les primitives d'une fonction f forment une famille de fonctions dont les graphiques sont isométriques : chacun est l'image d'un autre par une translation verticale. Et pour tout x, la pente de la tangente au graphique au point d'abscisse x est constante et égale à f(x) .



Corollaire du théorème fondamental du calcul intégral :

Soit f une fonction continue sur [a,b] et F une primitive de f ; alors il existe un nombre c ∈ ℝ tel que

$\forall x \in [a,b]$, $\int_a^x f(t)dt$ = **F(x) + c ;** pour x = a on a **0 =** $\int_a^a f(t)dt$ = **F(a) + c** Û **c = -F(a) ;**

et donc $\int_a^x f(t)dt$ = **F(x) – F(a) et si x = b on obtient** **la formule de Newton-Leibniz :** $\int_a^b f(t)dt$ = **F(b) – F(a)**

Notation : $\int_a^b f(t)dt$ = **F(b) – F(a)** = $[F(x)]_a^b$ **.** (autre notation : $\int_a^b f(t)dt$ = **F(b) – F(a)** = $F(x)\big|_a^b$)

Ainsi le calcul d'une intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$ revient essentiellement à la recherche d'une **primitive** F de f,

appelée aussi **intégrale indéfinie**, et notée F(x) = $\int f(x)dx$ avec $F'(x) = f(x)$.

Propriétés de l'intégrale indéfinie

1) $\int(\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx$, " **{**a ,b**}** Ì ℝ

2) $\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx$ = **G(f(x)) + c , où G est une primitive de g .**

Ces deux propriétés découlent directement de la définition de l'intégrale indéfinie et des théorèmes de dérivation.